Subiectul II — Exercițiul 1

Matematica — M1_Mate-Info

Toate aparițiile acestui exercițiu din toate modelele de examen din categoria de mai sus.

102 exerciții · din 102 sesiuni (2012–2026)

1. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2012 · Model Oficial

2012_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

	1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+my+m^2z=0 \\ mx+m^2y+z=0 \\ m^2x+y+mz=0 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.
5p	**a)** Determinați valorile lui m pentru care determinantul matricei sistemului este nul.
5p	**b)** Arătați că, pentru nicio valoare a lui m, sistemul nu are o soluție (x_0, y_0, z_0) cu x_0, y_0, z_0 numere reale strict pozitive.
5p	**c)** Arătați că rangul matricei sistemului este diferit de 2, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

2. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2012 · Speciala Subiect V07 · V07

2012_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V07.pdf

---

1. În $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}\cos x&0&i\sin x\\0&1&0\\i\sin x&0&\cos x\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați $\det(A(\pi))$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $(A(x))^{2012}=I_3$.

3. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2012 · Toamna August · V09

2012_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} -x+ay+(2a+4)z=1 \\ (a+2)x+ay+(a+1)z=1 \\ (a+1)x+(2a-1)y+3z=2 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că determinantul matricei sistemului este egal cu $3a^3+9a^2-3a-9$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul este compatibil determinat.

5p **c)** Pentru $a=-2$, rezolvați sistemul.

4. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2012 · Vara Iunie · V05

2012_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V05.pdf

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ x+y+mz=0 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei sistemului.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** În cazul $m=2$, determinați soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $x_0 > 0$ și $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$.

5. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2013 · Model Oficial

2013_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se notează cu $D(x,y)$ determinantul matricei $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & y & x \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Calculați $D(-1,2)$.

5p **b)** Determinați numărul real q pentru care matricea $A(2,q)$ are rangul egal cu 2.

5p **c)** Arătați că există cel puțin o pereche (x,y) de numere reale, cu $x\neq y$, pentru care $D(x,y)=D(y,x)$.

6. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2013 · Speciala Subiect V03 · V03

2013_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

	1. Pentru fiecare număr real a se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.
5p	**a)** Calculați $\det(A(0))$.
5p	**b)** Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care $5A(a)-(A(a))^2=4I_3$.
5p	**c)** Determinaţi inversa matricei $A(2)$.

7. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2013 · Toamna August · V09

2013_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf

	1. Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ m & 0 & 0\\ m & 0 & m\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Calculaţi $\det(A(1))$.
5p	**b)** Determinaţi numerele reale m știind că $A(m)\cdot A(-m)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.
5p	**c)** Arătaţi că $\det(A(1)+A(2)+\ldots+A(101))=-51^2\cdot 101^3$.
	2. Pe multimea numerelor reale se defineste legea de compozit

8. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2013 · Vara Iunie · V02

2013_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

---

1. Se consideră determinantul $D(a,b)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{vmatrix}$, unde a şi b sunt numere reale.

5p **a)** Arătaţi că $D(2,3)=2$.

5p **b)** Verificaţi dacă $D(a,b)=(a-1)(b-1)(b-a)$, pentru orice numere reale a şi b.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P_n\left(n,n^2\right)$, unde n este un număr natural nenul. Determinaţi numărul natural n, $n\geq 3$, pentru care aria triunghiului $P_1P_2P_n$ este egală cu 1.

9. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2014 · Model Oficial

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

---

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătaţi că $A(x)+A(-x)=2A(0)$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinaţi numărul real x pentru care $\det\left(A(x)\right)=0$.

5p **c)** Arătaţi că există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relaţia $A(1)\cdot X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

10. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2014 · Simulare Nationala

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(a))=(a+2)(a-1)^2$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Calculați inversa matricei $A(-1)$ în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **c)** Determinați perechile de numere naturale (a,b) pentru care matricea $A(a)\cdot A(b)$ are suma elementelor egală cu 24.

2. Pe multimea numerelor reale se defineste legea de compozitie $x*y=3xy-3x-3y+4$. Legea

11. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2014 · Speciala Subiect V09 · V09

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf

	1. Se consideră matricea $A(n)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 2^n-1 & 1 \end{pmatrix}$, unde n este număr natural.
5p	**a)** Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
5p	**b)** Determinaţi numărul natural n ştiind că $A(n)\cdot A(1)=A(3)$.
5p	**c)** Determinați numerele naturale p și q știind că $A(p)\cdot A(q)=A(pq)$.

12. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2014 · Toamna August · V07

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 2x^2-2x & 4x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
5p	**b)** Arătaţi că $A(x+y)=A(x)\cdot A(y)$ pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numerele reale x știind că $A(x^2+2)=A(x)\cdot A(x)\cdot A(x)$.

13. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2014 · Vara Iunie · V01

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & 2 \\ a & a & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătaţi că $\det(A(0))=8$.
5p	**b)** Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.
5p	**c)** Determinați matricea $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ știind că $A(1)\cdot X=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

14. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2015 · Model Oficial

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a & a+1\\ 2 & a+2 & a+3\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculați $\det\left(A(a)\right)$.

5p **b)** Determinați numărul natural n, știind că $2A\left(n^2\right)-A(n)=A(6)$.

5p **c)** Arătaţi că există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relația $A(2015)\cdot X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

15. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2015 · Simulare Nationala

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\x&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $A(1)+A(-1)=2A(0)$.

5p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det\left(A(x)+I_3\right)=0$.

5p **c)** Arătați că $\det\left(aI_3-bA(-1)+cA(-1)\cdot A(-1)\right)\geq 0$, pentru orice numere reale pozitive a, b și c.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru

16. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2015 · Speciala Subiect V09 · V09

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}0 & x & 0\\ x & 0 & x\\ 0 & x & 0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot B(x)+B(x)\cdot A=3B(x)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x)\cdot B(x)\cdot B(x)=B\left(x^2+x-2\right)$.

17. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2015 · Toamna August · V01

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V01.pdf

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1+2x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.
5p	**b)** Arătați că $A(x)A(y)=A(xy+x+y)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numerele reale x, știind că $A(x)A(x)A(x)=A(7)$.

18. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2015 · Vara Iunie · V08

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V08.pdf

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $B(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(B(0))=1$.

5p **b)** Arătați că $B(x)+B(y)=2B\left(\frac{x+y}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $B\left(x^2+1\right)B(x)=B\left(x^2+x+1\right)$.

19. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2016 · Model Oficial

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(10)\right)=1024$.
5p	**b)** Determinați numerele reale x, știind că $A(x)\cdot A(2x)=A\left(x^2+2\right)$.
5p	**c)** Știind că $A(n)=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(2016)$, demonstrați că n este număr natural divizibil cu 2017.

20. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2016 · Simulare Nationala

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

	1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ m & m & 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.
5p	**a)** Calculați $\det(A(1))$.
5p	**b)** Determinați valorile reale ale lui m, pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.
5p	**c)** Rezolvați ecuația matriceală $X \cdot A(0)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, unde $X \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

21. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2016 · Speciala Subiect V01 · V01

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V01.pdf

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} -mx+y+z=-1 \\ x-my+z=-1 \\ x+y-mz=m \end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=2$.

5p **b)** Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice număr real m, $m\neq -1$ și $m\neq 2$.

5p **c)** Pentru $m=2$, determinați soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care $x_0+2y_0+3z_0=9$.

2. Pe multimea numerelor reale se defineste legea de compozitie asociativă

22. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2016 · Toamna August · V02

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V02.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & -1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+ay+z=1\\ ax+y-z=-1\\ x+y-2z=0\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right)=-2$.

5p **b)** Demonstrați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a, $a\neq -1$ și $a\neq 1$.

5p **c)** Determinați numerele întregi a, pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), iar x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi.

23. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2016 · Vara Iunie · V08

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V08.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & x^2+x \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a\neq -1$, știind că $A\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)A\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{2016\cdot 2017}\right)=A\left(\frac{a}{a+1}\right)$.

24. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2017 · Model Oficial

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

	1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Calculați $\det(A(2))$.
5p	**b)** Demonstrați că $\det(A(x)+B(x))=\det(B(x))$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** Determinaţi numerele naturale n și p, știind că $A(n)B(p)=B(3)$.

25. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2017 · Simulare Nationala

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & 3\\ 1 & 3 & a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=1\\ x+ay+3z=2\\ x+3y+az=2\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=(a+1)(a-3)$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numerele reale m pentru care $A(m)A(2-m)=A(2-m)A(m)$.

5p **c)** Determinați numerele întregi a pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), iar x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi.

26. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2017 · Speciala Subiect V04 · V04

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V04.pdf

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2^x & 4^x\\ 1 & x & 2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $\det(A(x))=\left(2^x-1\right)\left(2^x+x-x\cdot 2^x\right)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Arătați că $A(1)+A(2)+A(3)+\ldots+A(2017)=\begin{pmatrix}2017 & 2017 & 2017\\ 2017 & 2\left(2^{2017}-1\right) & \frac{4}{3}\left(4^{2017}-1\right)\\ 2017 & 2017\cdot 1009 & 2017\cdot 2018\end{pmatrix}$.

27. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2017 · Toamna August · V10

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V10.pdf

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0))=-1$.
5p	**b)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x))\cdot\det(A(x+1))=12$.
5p	**c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(2)\cdot X=A(0)$.

28. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2017 · Vara Iunie · V02

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & a\\ -2 & -1 & 3\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+2z=0\\ x+2y+az=0\\ -2x-y+3z=0\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(9))=0$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** Demonstrați că, dacă sistemul are soluția (x_0,y_0,z_0), cu x_0, y_0 și z_0 numere reale nenule, atunci $-x_0+y_0+z_0=11(x_0+y_0+z_0)$.

29. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2018 · Model Oficial

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & x & y \\ x & 1 & y \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(2,3)\right)=12$.

5p **b)** Demonstrați că $\det\left(A\left(n^2,n\right)\right)\geq 0$, pentru orice număr natural n.

5p **c)** Determinaţi numărul real x pentru care inversa matricei $B=A(x,0)\cdot A(x,0)$ este matricea $A(x,0)$.

30. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2018 · Simulare Nationala

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 2x-1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2x-1 & 0 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x))=0$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(x)+A(1-x)=2A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1-x)=\frac{1}{2}A\left(\frac{1}{2}\right)$.

31. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2018 · Speciala Subiect V03 · V03

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

1. Se consideră matricea $M(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y+z=2 \\ (a+1)x-y+z=0 \\ x+y-az=1 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(-1))=0$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(M(a))=0$.

5p **c)** Determinați numerele reale a, știind că sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și $2x_0+y_0z_0=0$.

32. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2018 · Toamna August · V09

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x-2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x-2} \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y-2)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale m pentru care $A(1)A(2)A(3)\cdot\ldots\cdot A(10)=A\left(m^2+m+17\right)$.

33. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2018 · Vara Iunie · V02

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

1. Se consideră matricea $M(m)=\begin{pmatrix} 2m & 1 & 1 \\ 1 & 2m & 1 \\ 1 & 1 & 2m \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2mx+y+z=-1 \\ x+2my+z=0 \\ x+y+2mz=1 \end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(0))=2$.

5p **b)** Determinați numerele reale m, știind că $\det(M(m))=0$.

5p **c)** Pentru $m=-1$, demonstrați că, dacă (a,b,c) este o soluție a sistemului, cel mult unul dintre numerele a, b și c este întreg.

34. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2019 · Model Oficial

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $M(m)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & m & -1 \\ m & 1 & 3 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x+2y+4z=5 \\ -x+my-z=-2 \\ mx+y+3z=4 \end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(0))=3$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** Pentru $m=1$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $4y_0^2=(x_0+z_0)^2$.

2. Pe multimea numerelor reale se defineste legea de compozitie asociativă, cu element neutru,

35. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2019 · Simulare Nationala

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & a\\ 2 & a & 4\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=1\\ x+2y+az=2\\ 2x+ay+4z=3\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=a(3-a)$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a=0$, demonstrați că sistemul de ecuații este incompatibil.

5p **c)** Determinați numerele întregi a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi.

36. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2019 · Speciala Subiect V08 · V08

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V08.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln(a+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real, $a>0$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=A(ab+a+b)$, pentru orice numere reale a și b, $a>0$, $b>0$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>0$, știind că $A(a)A(a)A(a)=A(7)$.

37. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2019 · Toamna August · V07

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a+1&0&0\\1&a&1\\0&0&a+1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=4$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=abI_3+(a+b+1)A(0)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $A(0)A(1)A(2)\ldots A(2019)=n!A(0)$.

38. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2019 · Vara Iunie · V06

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V06.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=0$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=2A(ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Demonstrați că matricea $B=A(\log_2 3)\cdot A(\log_3 4)\cdot A(\log_4 5)\cdot\ldots\cdot A(\log_{15}16)$ are toate elementele numere întregi.

39. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Model Oficial

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ a & 4 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+2y+z=4 \\ ax+4y+z=6 \\ x-y+az=1 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=0$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care matricea $A(a)$ are rangul 2.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

40. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Speciala Subiect V01 · V01

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V01.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2-a & a\\ a & 1 & 1\\ a & 2a-5 & a-2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+(2-a)y+az=1\\ ax+y+z=2-a\\ ax+(2a-5)y+(a-2)z=-4\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=3$.

5p **b)** Demonstrați că $\det(A(a))=(a-1)(a-3)(3a+1)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numărul natural a pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și x_0, y_0, z_0 sunt numere naturale.

41. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test01

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test01.pdf

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & a & a^2-a \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(3)\cdot X=A(5)$.

42. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test02

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test02.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & -2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a & -2a^2 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $A(n)=A(1)A(2)A(3)\cdot\ldots\cdot A(2020)$, atunci numărul natural n este multiplu de 2021.

43. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test03

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test03.pdf

---

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a&0&2-a\\0&2&0\\2-a&0&a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=8$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=2A(ab-a-b+2)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați perechile de numere întregi p și q pentru care $A(p)A(q)=4I_3$.

44. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test04

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test04.pdf

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x&1&-x\\1&0&1\\-x&1&x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-4$.

5p **b)** Demonstrați că $\det(A(x)A(y)-A(2xy))=0$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $A(1)A\left(\frac{1}{2}\right)+A(2)A\left(\frac{1}{4}\right)+\ldots+A(1010)A\left(\frac{1}{2020}\right)=nI_3$.

45. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test05

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test05.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & a+1 & a \\ a & 6 & 4 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x+2y+z=3 \\ 2x+(a+1)y+az=3 \\ ax+6y+4z=a+3 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(a))=(a-1)(a-4)$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Arătați că **nu** există niciun număr real a pentru care $(A(4)-A(1))\cdot A(a)=A(a)\cdot(A(4)-A(1))$.

5p **c)** Determinați numerele întregi a, pentru care sistemul de ecuații are soluția unică (x_0,y_0,z_0) cu x_0, y_0 și z_0 numere întregi.

46. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test06

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test06.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ 3 & a & 2 \\ 2 & a & 5 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x+ay+2z=4 \\ 3x+ay+2z=1 \\ 2x+ay+5z=b \end{cases}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-3$.

5p **b)** Pentru $a=-1$ și $b=-2$, rezolvați sistemul de ecuații.

5p **c)** Determinați numerele reale a și b pentru care sistemul de ecuații este compatibil nedeterminat.

47. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test07

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test07.pdf

1. Se consideră matricele $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $A(a)=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&a\\1&-a&0\end{pmatrix}$ și $\left(A(a)\right)^t=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-a\\3&a&0\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det\left(A(2)\right)=1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr rațional q, matricea $A(q)$ este inversabilă.

5p **c)** Se consideră matricea $B(a)=A(a)-\left(A(a)\right)^t$. Determinați numerele raționale p pentru care $B(p)B(p)B(p)+5B(p)=O_3$.

48. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test08

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test08.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ a-3 & a & 1 \\ 3 & 2a-1 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x+ay+z=1 \\ (a-3)x+ay+z=2a-1, \\ 3x+(2a-1)y+z=1 \end{cases}$ unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=5$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul de ecuații este compatibil determinat.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că sistemul de ecuații are soluție unică (x_0, y_0, z_0) și x_0, y_0 și z_0 sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2. Pe multimea numerelor reale se defineste legea de compozitie asociativă si cu element neutru

49. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test09

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test09.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ a & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr întreg.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=7$.

5p **b)** Demonstrați că rangul matricei $A(a)$ este egal cu 3, pentru orice număr întreg a.

5p **c)** Determinați numărul întreg m pentru care inversa matricei $A(m)$ are toate elementele numere întregi.

50. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test10

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test10.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2a+1 & 1 & -2 \\ a-1 & -1 & 1 \\ 2a & -2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} (2a+1)x+y-2z=a \\ (a-1)x-y+z=a+1, \\ 2ax-2y+z=1 \end{cases}$ unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care există y_0 și z_0, numere reale, astfel încât $(2, y_0, z_0)$ să fie soluție a sistemului de ecuații.

51. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test11

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test11.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ a & i & a \\ -1 & a & -1 \end{pmatrix}$, unde $i^2=-1$ și a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=i$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Calculați $\underbrace{A(0)\cdot A(0)\cdot A(0)\cdot\ldots\cdot A(0)}_{\text{de 2020 ori } A(0)}$.

52. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test12

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test12.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ a+4 & a+3 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(0))=-15$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care rangul matricei $A(a)$ **nu** este egal cu 3.

5p **c)** Demonstrați că matricea $M=A(-1)\cdot A(-1)\cdot A(-1)\cdot A(-1)$ are toate elementele numere întregi, divizibile cu 25.

53. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test13

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test13.pdf

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m+1 & (m+1)^2 & 1 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=0$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele necoliniare $A(1,1)$, $B\left(m,m^2\right)$ și $C\left(m+1,(m+1)^2\right)$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m, știind că triunghiul ABC are aria egală cu 1.

54. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test14

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test14.pdf

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(m)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real m, rangul matricei $M(m)$ este diferit de 2.

5p **c)** Determinați numărul real m, $m\neq 1$, știind că inversa matricei $M(m)$ este matricea A.

55. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test15

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test15.pdf

1. Se consideră matricele $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(a))=1$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Se consideră matricea $B(a)=A(a)-I_3$, unde a este număr real. Demonstrați că, pentru orice număr real a, $B(a)\cdot B(a)\cdot B(a)=O_3$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că suma elementelor matricei X pentru care $A(2)\cdot X=A(1)+A(2)+\ldots+A(n)$ este egală cu 21.

56. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test16

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test16.pdf

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B=I_3+A$.

5p **a)** Arătaţi că $\det A=0$.

5p **b)** Arătaţi că matricea $I_3-\frac{1}{11}A$ este inversa matricei B.

5p **c)** Dați exemplu de trei matrice $U, V, T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de rang 1, astfel încât $U+V+T=B$.

57. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test17

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test17.pdf

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & m & 1\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y+z=0\\ 2x+my+z=0\\ x-3y+2z=0\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(m))=m-9$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care sistemul de ecuații admite soluții diferite de $(0,0,0)$.

5p **c)** Pentru $m=9$, se consideră (x_0,y_0,z_0) o soluție a sistemului de ecuații, cu x_0, y_0 și z_0 numere reale astfel încât $(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0)$. Calculați $\dfrac{x_0^2+y_0^2-z_0^2}{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

58. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test18

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test18.pdf

1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați rangul matricei $B=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)-I_3$.

59. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test19

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test19.pdf

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 2 & m+1 & 1 \\ 1 & 1 & m+1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ 2x+(m+1)y+z=2 \\ x+y+(m+1)z=m+1 \end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=0$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru $m=-3$, sistemul de ecuații **nu** are soluții.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real m, sistemul de ecuații are cel mult o soluție.

60. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test20

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test20.pdf

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 4 & 1 & m \\ 1 & -m & -1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x+y+mz=4 \\ 4x+y+mz=6 \\ x-my-z=-1 \end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=2$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații verifică relația $\frac{y_0}{z_0}=x_0$.

61. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Toamna August · V03

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1+\ln x\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $x\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(y)A(x)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $A\left(\frac{1}{3}\right)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & n\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

62. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Vara Iunie · V06

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V06.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a^2+1 & a^2+2 & a^2+3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=-1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Determinați numerele întregi a pentru care inversa matricei $A(a)$ are toate elementele numere întregi.

63. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Model Oficial

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $A(a,b,c)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$, unde a, b și c sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0,1,2))=2$.

5p **b)** Demonstrați că $\det(A(a,b,c))=(b-a)(c-a)(c-b)$, pentru orice numere reale a, b și c.

5p **c)** Demonstrați că, dacă m, n și p sunt numere naturale, cu $m<n<p$, astfel încât determinantul matricei $A(m,n,p)$ este număr prim, atunci numerele m, n și p sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

64. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Simulare Nationala

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+(a+1)y+(a+2)z=a \\ bx+(b+1)y+(b+2)z=b \\ y+z=1 \end{cases}$ și matricea $X(a,b)=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(X(0,1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice numere reale distincte a și b, sistemul de ecuații are soluție unică.

5p **c)** Demonstrați că, dacă (x_0,y_0,z_0) este soluție a sistemului de ecuații, atunci $y_0^2-z_0^2-2ax_0=3$, pentru orice număr real a.

65. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Speciala Subiect V07 · V07

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V07.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2a-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+y-2z=2 \\ 2x+y+3z=1 \\ (2a-1)x+2y+z=a \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(4))=5$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a=3$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului de ecuații pentru care $z_0^2=x_0+y_0$.

66. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test01

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test01.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1-a & 2a & 0 \\ -a & 1+2a & 0 \\ 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=4$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Demonstrați că, dacă a, b și c sunt numere reale pentru care $A(a)\cdot A(b)\cdot A(c)=A(0)$, atunci $(1+a)(1+b)(1+c)=1$.

67. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test02

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test02.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(2)\right)=1$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $A(a)A(1)=A(1)A(a)$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ are rangul doi.

68. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test03

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test03.pdf

---

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A+I_3\right)=1$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot A\cdot A=O_3$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $X\in\mathcal{M}_3\left(\mathbb{R}\right)$ pentru care $A\cdot X=X\cdot A$, atunci există numerele reale a, b și c, astfel încât $X=aI_3+bA+cA\cdot A$.

69. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test04

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test04.pdf

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Arătați că $\det A=6$.
5p	**b)** Arătați că $A\cdot B+B=B\cdot A$.
5p	**c)** Determinați numerele reale x și y, știind că $(x+1)A\cdot B+(y-2)B\cdot A=B\cdot B\cdot B$.

70. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test05

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test05.pdf

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(m)+A(-m)\right)=8$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care are loc egalitatea $A(m)\cdot A(m)=A(0)$.

5p **c)** Demonstrați că $A(1)-A(2)+A(3)-A(4)+\ldots+A(2n-1)-A(2n)=n\left(A(-1)-A(0)\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

71. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test06

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test06.pdf

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ și $M(m)=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & m & 1 \\ m-1 & m & -m \end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=-1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real m, rangul matricei $M(m)$ este cel puțin egal cu 2.

5p **c)** Determinați numărul real m, $m\neq -1$, știind că inversa matricei $M(m)$ este matricea A.

72. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test07

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test07.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a+1 & a\\ 1 & 1 & a+1\\ 2 & a & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+(a+1)y+az=6a+3\\ x+y+(a+1)z=4a+7\\ 2x+ay+z=2a+6\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=2(a^2+1)$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $A(a)\cdot A(0)=A(0)\cdot A(a)$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă (x_0,y_0,z_0) este soluția sistemului de ecuații, atunci x_0, y_0 și z_0 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

73. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test08

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test08.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a+1 & 1 & a \\ 1 & -1 & -a \\ 2-a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} (a+1)x+y+az=-5 \\ x-y-az=10 \\ (2-a)x+y+z=1-a \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=4$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care sistemul de ecuații **nu** este compatibil determinat.

5p **c)** Determinați numărul natural a pentru care sistemul are soluția unică (x_0,y_0,z_0) și x_0 este număr întreg.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru

74. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test09

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test09.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(3)\right)=10$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, rangul matricei $A(n)$ este egal cu 3.

5p **c)** Arătați că, pentru orice număr natural m, $m\geq 2$, inversa matricei $A(m)$ **nu** are toate elementele numere întregi.

75. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test10

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test10.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2a-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+y-2z=2 \\ 2x+y+3z=1 \\ (2a-1)x+2y+z=a \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(4))=5$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a=3$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului de ecuații pentru care $z_0^2=x_0+y_0$.

76. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test11

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test11.pdf

1. Se consideră matricea $A(a,b,c)=\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} (1+a)x+y+z=0 \\ x+(1+b)y+z=0 \\ x+y+(1+c)z=0 \end{cases}$, unde a, b și c sunt numere reale nenule.

5p **a)** Arătați că $\det(A(-2,0,2))=-4$.

5p **b)** Arătați că, dacă $abc+ab+ac+bc\neq 0$, atunci matricea $A(a,b,c)$ este inversabilă.

5p **c)** Demonstrați că, dacă sistemul de ecuații admite și soluții diferite de soluția $(0,0,0)$, atunci numărul $N=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ este întreg.

77. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test12

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test12.pdf

1. Se consideră matricea $A(m,x)=\begin{pmatrix} 2 & -x & 1 \\ 1 & m & 3 \\ 3 & -2 & x \end{pmatrix}$, unde m și x sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(4,2)\right)=0$.

5p **b)** Determinați rangul matricei $A(2,1)$.

5p **c)** Determinați perechile de numere naturale nenule și distincte (n,p) pentru care $\det\left(A(3,n)\right)=\det\left(A(3,p)\right)$.

78. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Toamna August · V04

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V04.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1+\log_2 a & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice $a\in(0,+\infty)$, matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $a\in(0,+\infty)$, $\det\left(A(a)+(A(a))^{-1}\right)\geq 8$, unde $(A(a))^{-1}$ este inversa matricei $A(a)$.

79. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Vara Iunie · V02

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

---

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a+2&0&-a\\0&2&0\\3a&0&2-3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=8$.

5p **b)** Determinați matricea $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, știind că $aB=A(a)-2I_3$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $\det(A(n)\cdot A(-n))>0$.

80. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2022 · Model Oficial

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&i&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}$ și $A(z)=aI_3+bB$, unde $z=a+ib$, cu a și b numere reale și $i^2=-1$.

5p **a)** Arătați că $\det B=i$.

5p **b)** Demonstrați că $A(z_1)\cdot A(z_2)=A(z_1z_2)$, pentru orice numere complexe z_1 și z_2.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $A(1+i)\cdot A(2+i)\cdot A(3+i)\cdot A(1-i)\cdot A(2-i)\cdot A(3-i)=nI_3$.

81. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2022 · Simulare Nationala

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 3 & a\\ 2 & 1 & -1\\ a & 3 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+3y+az=2\\ 2x+y-z=-1\\ ax+3y+z=1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=0$.

5p **b)** Arătați că $B(a)\cdot B(a)\cdot B(a)=a^3B(1)$, pentru orice număr real a, unde $B(a)=A(a)-A(0)$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă sistemul de ecuații are o infinitate de soluții, atunci $x_0y_0+y_0z_0+z_0x_0\leq 0$, pentru orice soluție (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații, cu x_0, y_0 și z_0 numere reale.

82. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2022 · Speciala Subiect V03 · V03

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x+1&-x&0\\x&1-x&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Arătați că $(A(x)-I_3)(A(x)-I_3)=O_3$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(x)=xA(x)-(x-1)I_3$.

83. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2022 · Toamna August · V07

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x&1-x&1\\1-x&x&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=2$.

5p **b)** Arătați că $A(1)\cdot A(x)-A(x-1)=2I_3$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $A(1)\cdot A(1)\cdot A(x)=3A(1)+2I_3$.

84. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2022 · Vara Iunie · V01

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & -x & x^2 \\ 0 & 1 & -2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $A(n)\cdot A(n+1)\cdot A(n+2)\cdot A(n+3)=A\left(2n^2\right)$.

85. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2023 · Model Oficial

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 3 & a & -2 \\ 2a+1 & 1-a & -1 \\ a+2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 3x+ay-2z=b \\ (2a+1)x+(1-a)y-z=c \\ (a+2)x-2y+z=-1 \end{cases}$, unde a, b și c sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=5$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Determinați numerele reale b și c pentru care sistemul de ecuații este compatibil, oricare ar fi numărul real a.

86. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2023 · Simulare Nationala

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+y+2z=-2 \\ x+ay-z=4 \\ 2x+2y+z=2 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.

5p **c)** Pentru $a=1$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi și $x_0>y_0>z_0$.

87. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2023 · Speciala Subiect V06 · V06

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V06.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & -1 & 2a \\ 1 & -2 & a \\ 1 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax-y+2az=0 \\ x-2y+az=0 \\ x+y+(1-a)z=0 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.

5p **c)** Pentru $a=-1$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

88. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2023 · Toamna August · V07

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & x & x \\ 1 & x & 1 \\ -1 & -x & -1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=0$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)-A(xy)=(x+y-2)A(0)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x și y pentru care $A(-1)\cdot A(3)\cdot A(x)=A(y)$.

89. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2023 · Vara Iunie · V01

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ a & a+1 & -2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x+y+2z=2 \\ x-y+az=4 \\ ax+(a+1)y-2z=a \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=8$.

5p **b)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a=-2$, arătați că $x_0z_0+y_0=-2$, pentru orice soluție (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații.

90. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2024 · Model Oficial

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}0&0&1\\a&-1&a\\1&0&0\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Arătați că $A(a)\cdot A(b)=A(a)-A(b)+I_3$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(1)\cdot X\cdot A(0)=I_3$.

91. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2024 · Simulare Nationala

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}1&-1&x\\-1&0&0\\x&0&-1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Arătați că $\det(A(x)\cdot A(x)-I_3)\le 0$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Se consideră matricea $B\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$. Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ pentru care $X\cdot(A(0))^{-1}=B\cdot A(0)$, unde $(A(0))^{-1}$ este inversa matricei $A(0)$.

92. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2024 · Speciala Subiect V09 · V09

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 0 & x-1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=3$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1)=2A(x)$.

5p **c)** Arătați că, dacă matricea $A(x)$ este inversabilă, atunci și matricea $A(-x)$ este inversabilă.

93. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2024 · Toamna August · V03

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}2^x&0&0\\0&1&x\\0&x&1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(B(1))=0$.

5p **b)** Arătați că $B(x)\cdot B(y)-B(x+y)=xyA$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $B(x)\cdot B(x+1)-B(2x)\cdot B(1)=xA$.

94. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2024 · Vara Iunie · V10

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V10.pdf

1. Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x+2 & x \\ 0 & 2x & x+2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(1))=7$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $M(x)\cdot M(2)=M(x-1)$.

5p **c)** Determinați numerele naturale n pentru care $2\det(M(n))\leq \det(M(2n))$.

95. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2025 · Model Oficial

2025_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}1&x&0\\0&1&x\\-x&0&1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Arătați că $A-B(x)\cdot A=xI_3$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $C(x)$ astfel încât $A\cdot C(x)=B(x)$. Arătați că $C(x)-C(y)=(y-x)A$, pentru orice numere reale x și y.

96. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2025 · Speciala Subiect V03 · V03

2025_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $M(x)=\begin{pmatrix}2x&3x&-3\\-x&-2x&1\\0&0&x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(0))=0$.

5p **b)** Arătați că $M(x)\cdot M(y)-xyI_3=(x+y+1)M(0)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $M(1)\cdot M(x)-M(2)\cdot M\left(\frac{x}{2}\right)=2M(0)$.

97. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2025 · Toamna August · V03

2025_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf

	1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $M(x)=\begin{pmatrix}2x&3x&-3\\-x&-2x&1\\0&0&x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(M(0))=0$.
5p	**b)** Arătați că $M(x)\cdot M(y)-xyI_3=(x+y+1)M(0)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numărul real x pentru care $M(1)\cdot M(x)-M(2)\cdot M\left(\frac{x}{2}\right)=2M(0)$.

98. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2026 · Model Oficial

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1-a \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax-2z=4 \\ x+y+(1-a)z=3 \\ 2x+y-2z=5 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=2$.

5p **b)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a=2$, arătați că $x_0z_0+y_0\geq 0$, pentru orice soluție (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații, cu x_0, y_0 și z_0 numere reale.

99. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2026 · Rezerva Vara Iunie · V07

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Rezerva_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V07.pdf

---

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}2a-1&2&1\\0&-1&-a\\0&2&2a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(3))=0$.

5p **b)** Arătați că $A(a)\cdot A(a)=(2a-1)A(a)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Se consideră matricea $B(n)=A(n)+nI_3$, unde n este număr natural. Determinați numărul natural n pentru care $A(n)\cdot B(n)=2n^2A(n)$.

100. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2026 · Speciala Subiect V02 · V02

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V02.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1-2a & a & 0 \\ 2a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-3a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=4$.

5p **b)** Arătați că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b-3ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $A(1)\cdot A(a)+A(5)=2A(4)$.

101. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2026 · Toamna August · V04

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V04.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & -2a\\ 2 & -1 & -a\\ 1 & -a & 0\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații liniare $\begin{cases}x+ay-2az=-1\\ 2x-y-az=a\\ x-ay=a\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=4$.

5p **b)** Pentru $a=1$, arătați că sistemul de ecuații are o infinitate de soluții.

5p **c)** Arătați că, pentru orice $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, sistemul de ecuații are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și $4x_0z_0=1$.

102. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2026 · Vara Iunie · V03

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V03.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & a\\ a & 3 & a\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații liniare $\begin{cases}x+ay+az=1\\ ax+3y+az=0\\ 2y+z=0\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Arătați că, pentru orice număr real a, sistemul de ecuații are soluție unică.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul a pentru care sistemul de ecuații are soluția (x_0,y_0,z_0), cu $z_0=nx_0$, unde n este număr natural.